6. cvičení - Řady 3

☕ = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Určete, zda následující řady konvergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$

Příklad 2. Rozhodněte o neabsolutní i absolutní konvergenci následujících řad, kde $x \in \mathbb{R}$.

(a) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+10}{3n+1}\right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n^2\pi\right)\left(\sqrt{n+9}-\sqrt{n}\right)$

(e) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci řad. Všechna $x, p, q, \alpha \in \mathbb{R}$.

(a) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\mathrm{arccotg}^2\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{n^2}{2^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\log\left(n^2+n\right)}{n^2}$

(d) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\lg\frac{n^2-1}{n^2+1}$

(e) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\arcsin\frac{1}{2n}\right)^n$

(f) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{\sqrt{n}\log n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{x}{\sqrt{n}\log n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+3}\left(\log\frac{n+3}{n+1}\right)^n$

(i) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!+2}$

(j) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}\binom{n}{5}}$

(k) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p+1}{n^q+n^2-3}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$

Pokračování na další straně.

Příklad 4 (Bonus)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergentní. (Řady mohou mít i nezáporné členy). Rozhodněte, zda musí platit:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ K

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ D

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$K

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n,\ k, l \in \mathbb{R}$ K

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ K

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ K

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ K

Příklad 5 (Bonus)**.** Dokažte, nebo najděte protipříklad.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\implies \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ K

(b) ☕ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} + a_{2n})$ K $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\implies a_{n+1} \leq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ K $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \colon a_{n+1} \leq a_n$